

УДК 515.12

О ПРОСТРАНСТВАХ С НАПРАВЛЕННЫМИ СИСТЕМАМИ ОТКРЫТЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

© И.В. Блудова

Ключевые слова: счетно направленная система открытых отображений топологического пространства; тихоновское произведение; Σ -произведение; наследственно сепарабельное пространство; пространство со счетной сетью; G_δ -свойство Суслина.

Если топологическое пространство X обладает счетно направленной системой L открытых отображений f_α на наследственно сепарабельные пространства X_α , $\alpha \in A$, и эта система обладает некоторыми естественными свойствами, то 1. все системы λ L -цилиндрических подмножеств пространства X (т. е. множеств вида $f_\alpha^{-1}M : M \subset X_\alpha, \alpha \in A$) и все системы λ объединений G_δ -подмножеств в X содержат счетные подсистемы μ систем λ , плотные в λ (т. е. замыкания объединений систем μ и λ совпадают), 2. любое непрерывное отображение f пространства X на сепарабельное метризуемое пространство «пропускается» через одно из отображений f_α (т. е. f есть композиция этого f_α и непрерывного отображения пространства X_α). Из указанных результатов вытекают соответствующие результаты для тихоновских произведений наследственно сепарабельных пространств и для подпространств тихоновских произведений пространств со счетной сетью.

Часть результатов этой статьи (следствие 2 и часть теоремы 4 (см. замечание после теоремы 4)) получены К.В. Устьянцевым.

Ниже под пространством понимается топологическое пространство, под непрерывным отображением – непрерывное отображение пространств.

Напомним некоторые используемые далее определения.

Фиксируем пространство X .

Система $\mathcal{L} = \{f_\alpha : \alpha \in A\}$ непрерывных сюръективных отображений $f_\alpha : X \rightarrow X_\alpha$ пространства X называется *направленной* ($\mathcal{L}$, кратко, называется DS на X), если множество A направлено и, для любых $\alpha, \beta \in A$, $\beta > \alpha$, определено такое непрерывное отображение $\pi_{\beta\alpha} : X_\beta \rightarrow X_\alpha$, что

$$f_\alpha = \pi_{\beta\alpha} \circ f_\beta. \quad (1)$$

DS $\mathcal{L} = \{f_\alpha : \alpha \in A\}$ на X называется *счетно направленной*, если счетно направлено множество A (это значит, что для любой счетной системы B элементов из A существует элемент $\beta = \beta(B)$ множества A , следующий за всеми элементами из B).

DS $\mathcal{L} = \{f_\alpha : \alpha \in A\}$ на X называется *разделяющей* (кратко, SDS $\mathcal{L}$ на X), если диагональное произведение $\Delta\mathcal{L} : X \rightarrow \prod\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ является топологическим вложением. Другими словами, в соответствии с определением тихоновской топологии произведений пространств и в силу направленности $\mathcal{L}$,

(*) для любой точки $x \in X$ и любой ее окрестности O существуют $\alpha \in A$ и открытое в X_α множество O_α , такие, что $x \in f_\alpha^{-1}O_\alpha \subset O$.

DS $\mathcal{L} = \{f_\alpha : \alpha \in A\}$ на X называется:

открытой, если все f_α открыты;

σ -*разделяющей*, если

(**) для любых $\alpha_i \in A$, $\alpha_i < \alpha_{i+1}$, $i \in \mathbb{N}$, в A существует $\beta = \sup\{\alpha(i) : i \in \mathbb{N}\}$ и диагональное произведение $\Delta_S = \Delta\{\pi_{\beta\alpha(i)} : i \in \mathbb{N}\}$ есть топологическое вложение X_β в предел $X_S \subset \prod\{X_{\alpha(i)} : i \in \mathbb{N}\}$ обратной последовательности $S = \{X_{\alpha(i)}, \pi_{\alpha(i+1)\alpha(i)}; i \in \mathbb{N}\}$.

В дальнейшем мы будем отождествлять:

X_β с подпространством $\Delta_S X_\beta$ предела X_S при помощи Δ_S

и

ограничение на $\Delta_S X_\beta$ проекции π_i предела X_S в элемент $X_{\alpha(i)}$ обратной последовательности S – с отображением $\pi_{\beta\alpha(i)}$ (так как $\pi_{\beta\alpha(i)} = \pi_i \circ \Delta_S$).

Отметим, что множество X_β всюду плотно в X_S , так как все $\pi_{\beta\alpha(i)}$ – отображения «на».

Из (**) следует, что множество A счетно направлено.

Подмножество C пространства X с $DS \mathcal{L}$ (на X) называется *цилиндрическим* (соответственно, G_δ -цилиндрическим или *открыто цилиндрическим*), если существуют $\alpha \in A$ и множество (соответственно, G_δ -множество или открытое множество) D в X_α , такие, что $C = f_\alpha^{-1}D$. Систему (G_δ -)цилиндрических (соответственно, открыто цилиндрических) подмножеств пространства X будем называть (G_δ -)цилиндрической (соответственно, *открыто цилиндрической*).

Л е м м а 1. Если $SDS \mathcal{L} = \{f_\alpha : \alpha \in A\}$ на X является счетно направленной, то любое G_δ -множество в X (и любое объединение G_δ -множеств в X) является объединением G_δ -цилиндрических множеств в X .

Система η подмножеств множества X называется *вписанной* в систему ξ подмножеств множества X , если каждый элемент системы η содержится хотя бы в одном из элементов системы ξ . Вписанная в систему ξ подмножеств пространства X система η подмножеств этого пространства называется *плотной* в ξ , если $\cup \xi \subset cl(\cup \eta)$. (В качестве вписанной в ξ или плотной в ξ системы η может выступать подсистема системы ξ .)

Т е о р е м а 1. Пусть $DS \mathcal{L} = \{f_\alpha : \alpha \in A\}$ на пространстве X является открытой и σ -разделяющей, а все пространства $X_\alpha = f_\alpha X$ наследственно сепарабельны. Тогда любая система ξ цилиндрических подмножеств пространства X обладает счетной плотной (в ξ) подсистемой, а замыкание $cl(\cup \xi)$ также является цилиндрическим подмножеством пространства X . Более точно, для ξ существуют $\beta \in A$ и счетная система ζ подмножеств пространства X_β , такие, что система $\eta = f_\beta^{-1}\zeta$ является плотной подсистемой системы ξ и $cl(\cup \xi) = cl(\cup \eta) = f_\beta^{-1}cl(\cup \zeta)$.

Напомним, что открытое подмножество O пространства называется *каноническим открытым*, если $O = int(cl(O))$.

Л е м м а 2. Пусть в условиях теоремы 1 система $\mathcal{L}$ является разделяющей. Тогда для любого открытого в X множества O существуют $\alpha \in A$ и каноническое открытое в X_α множество U такие, что множество $V = f_\alpha^{-1}U$ является каноническим открытым в X и $O \subset V \subset cl(O)$. Если множество O является каноническим открытым, то оно является открыто цилиндрическим (точнее, $O = (V =) f_\alpha^{-1}U$). Более того, открыто цилиндрическим множеством является любое объединение счетного числа канонических открытых множеств (в частности, любое функционально открытое множество).

Т е о р е м а 2. Пусть в условиях теоремы 1 система $\mathcal{L}$ является разделяющей. Тогда для любого непрерывного отображения g пространства X на метризуемое пространство со счетной базой Y существуют $\alpha \in A$ и непрерывное отображение $h : X_\alpha \rightarrow Y$, такие, что $g = h \circ f_\alpha$.

Введем, по-видимому, новое название следующего уже довольно давно изучаемого топологического инварианта. Будем говорить, что пространство X обладает G_δ -свойством *Суслина*, если любая система G_δ -подмножеств пространства X обладает счетной плотной подсистемой. Очевидно,

пространство, обладающее G_δ -свойством Суслина, обладает и свойством Суслина.

Из теоремы 1 и леммы 1 вытекает

Т е о р е м а 3. Если в теореме 1, дополнительно, система $\mathcal{L}$ является разделяющей, то для любой системы ξ подмножеств пространства X , являющихся объединениями G_δ -множеств, существует счетная вписанная в ξ и плотная в ξ система G_δ -цилиндрических множеств в X , а сама система ξ содержит счетную плотную подсистему (и, следовательно, X обладает G_δ -свойством Суслина).

Применим полученные результаты к тихоновским произведениям.

Фиксируем тихоновское произведение $\Pi = \prod\{X_j : j \in J\}$. Пусть A – множество всех счетных (и конечных) подмножеств множества J . Для $\alpha \in A$ пусть $X_\alpha = \prod\{X_j : j \in \alpha\}$. Для $\alpha, \beta \in A$, $\alpha \neq \beta$, будем считать $\alpha < \beta$, если $\alpha \subset \beta$. Для $\alpha \in A$, соответственно, для $\alpha, \beta \in A$, через pr_α , соответственно, через $\phi_{\beta, \alpha}$, обозначим проекцию произведения Π на его грань X_α , соответственно, проекцию грани X_β на грань X_α .

Фиксируем подпространство X произведения Π . Для $\alpha \in A$ через f_α обозначим ограничение проекции pr_α на X . Если все f_α сюръективны, то легко удостовериться, что система $\mathcal{L}_{prod} = \{f_\alpha : \alpha \in A\}$ непрерывных сюръективных отображений подпространства X является счетно направленной, разделяющей и σ -разделяющей. Если еще все f_α открыты, то система $\mathcal{L}_{prod}$ открыта.

Напомним, что подмножество C подпространства X тихоновского произведения Π называется *счетно цилиндрическим*, соответственно, *счетно G_δ -цилиндрическим*, если существует такое подмножество, соответственно, G_δ -подмножество, D некоторой счетной грани Y произведения Π , что $C = \pi^{-1}D$, где π – ограничение на X проекции произведения Π на грань Y .)

При помощи теорем 1-3 и следствия 1 мы получаем следующее утверждение.

Т е о р е м а 4. Пусть все счетные грани тихоновского произведения $\Pi = \prod\{X_j : j \in J\}$ наследственно сепарабельны и для подмножества X этого произведения ограничения на X всех проекций произведения Π на счетные грани этого произведения сюръективны и открыты. Тогда

1. любая система ξ счетно цилиндрических подмножеств пространства X обладает счетной плотной (в ξ) подсистемой, а замыкание $cl(\cup \xi)$ также является счетно цилиндрическим подмножеством пространства X ;

2. для любой счетно цилиндрической системы ξ подмножеств пространства X существуют счетная грань X_α произведения Π и счетное множество C в X_α , такие, что счетно цилиндрическая система $\{f_\alpha^{-1}x : x \in C\}$ вписана в систему ξ и плотна в ней;

3. для любого непрерывного отображения g пространства X на метризуемое пространство со счетной базой Y существуют счетная грань X_α произведения Π и непрерывное отображение $h : X_\alpha \rightarrow Y$, такие, что $g = h \circ f_\alpha$;

4. для любой системы ξ подмножеств пространства X , представимых в виде объединения G_δ -множеств в X , существует счетная вписанная в ξ и плотная в ξ система G_δ -цилиндрических множеств в X , а сама система ξ содержит счетную плотную подсистему (и, следовательно, X обладает G_δ -свойством Суслина).

З а м е ч а н и е. Теорема 4 частично (точнее, первая часть ее пункта 1 и ее пункт 3 (все в случае $X = \Pi$)) содержится в дипломной работе «О диадических бикомпактах» Анны Беляевой, выполненной в 2004 г. под руководством Б.А.Пасынкова.

Если X есть или открытое в Π множество, содержащее Σ -произведение всех пространств X_j с центром в некоторой точке произведения Π , или само X является таким Σ -произведением, то ограничение на X любой проекции pr_α является открытым и сюръективным отображением. Кроме того, пространство со счетной сетью наследственно сепарабельно и тихоновское произведение счетной системы пространств со счетной сетью является пространством со счетной сетью. Поэтому получаем

С л е д с т в и е 2. Пусть все сомножители тихоновского произведения $\Pi = \prod\{X_j : j \in J\}$ являются пространствами со счетной сетью, а подмножество X этого произведения есть или открытое в Π множество, содержащее Σ -произведение всех пространств X_j с центром в некоторой точке произведения Π , или само является таким Σ -произведением, то верны утверждения 1.-4. теоремы 4.

Поступила в редакцию 22 мая 2015 г.

Bludova I.V. ON SPACES WITH DIRECTED SYSTEMS OF OPEN MAPS

If a topological space X has a countably directed system L of open maps f_α onto hereditarily separable spaces X_α , $\alpha \in A$, and L has some natural properties, then 1. any system λ of L -cylinder subsets in X (i. e. sets of the form $f_\alpha^{-1}M$ such that $M \subset X_\alpha, \alpha \in A$) and any system μ of unions of G_δ -subsets in X contains a countable subsystem ν of λ , that is dense in λ (i.e. the closures of the unions of the systems μ and λ coincide), 2. any maps f of X onto a separable metric space may be «passed through» one of maps f_α (i.e. f is the composition of this f_α and a map of X_α). These results allow to obtain correspondent results for Tychonoff products of hereditarily separable spaces and for subspaces of Tychonoff products of spaces with a countable nets.

Key words: countably directed system of open onto maps of a topological space; Tychonoff product; Σ -product; hereditarily separable space; space with a countable net; G_δ -(Suslin property).

Блудова Ирина Валентиновна, Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана, г. Москва, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Основы математики и информатики» СУНЦ 1, e-mail: irina-bludova@yandex.ru

Bludova Irina Valentinovna, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Fundamentals of Mathematics and Computer Science Department, e-mail: irina-bludova@yandex.ru

УДК 517

О ТОПОЛОГИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО МНОЖЕСТВА В ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЛЕОНТЬЕВА С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ

© О.М. Божинская, Н.Г. Павлова

Ключевые слова: линейные управляемые системы; множество достижимости.

В работе исследуется вопрос о топологических свойствах технологического множества в динамической модели Леонтьева с непрерывным временем, в которой управлением служит функция непродовольственного потребления. Получены необходимые условия замкнутости технологического множества.